GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Sygyzies et multiplicités.* Note (*) de MM. **Christian Peskine** et **Lucien Szpiro**, présentée par M. Szolem Mandelbrojt.

1. Il existe une relation entre la longueur d'un complexe parfait de modules libres de type fini sur un anneau local noethérien, la dimension de l'homologie du complexe et la dimension de l'anneau. C'est le nouveau théorème d'intersection qu'on démontre pour les anneaux de caractéristique $p > 0$, et pour les anneaux essentiellement de type fini sur un corps.

2. Pour un module gradué de type fini de dimension projective finie sur un anneau gradué, en degrés positifs, $A = \sum_{n \geqq 0} A_n$ tel que A_0 soit un anneau local artinien et que A soit de type fini sur A_0, on démontre la positivité de la caractéristique de Euler-Poincaré et la formule du grade conjecturée dans (²).

1. Le nouveau théorème d'intersection.

Théorème 1. — *Soit* A *un anneau local noethérien de dimension d. Supposons qu'il existe un idéal* J *de A tel que* dim (A/J) $= d$, *et tel que* A/J *soit de caractéristique* $p > 0$ *ou que le complété de* A/J *soit le complété d'un anneau local essentiellement de type fini sur un corps. Pour tout complexe, non homotope à zéro, de* A*-modules libres de type fini*

$$0 \to L_s \to L_{s-1} \to \ldots \to L \to L_0 \to 0,$$

on a

$$d \leqq s + \sup_i \dim (H_i(L.)).$$

Par les méthodes standards utilisées pour démontrer le théorème d'intersection dans (²), et par une simple récurrence sur d, on montre qu'il suffit de prouver le théorème lorsque A/J = A est un anneau de caractéristique $p > 0$, et que $\sup_i \dim (H_i(L.)) = 0$, avec $H_0(L.) \neq 0$.

Considérons une résolution injective ($I^{\cdot}$) de A. Appelons h_i l'homomorphisme $L_{i+1} \to L_i$, et $M = \operatorname{Coker}(h_0) = H_0(L.)$. Si k est le corps résiduel de A, on peut supposer $k \otimes_A h_0 = 0$. La démonstration se fait alors en trois pas :

1° Soit E^i le plus grand sous-module artinien de I^i. On montre que l'aboutissement des suites spectrales induites par le double complexe $\operatorname{Hom}_A(L_j, E^i)$ est le même que celui des suites spectrales induites par le complexe $\operatorname{Hom}_A(L_j, I^i)$, c'est-à-dire $H_i(\operatorname{Hom}_A(L., A)) = H_i(L^{\vee}.)$.

2° Utilisant le fait que $H_i(L^{\vee}.) = 0$ pour $i > s$, on démontre que si

$$Z_i = \operatorname{Ker}[\operatorname{Hom}_A(M, E) \to \operatorname{Hom}_A(M, E^{i+1})],$$

on a $Z_i \subset C_i$, pour $i > s$, avec $C_i = \operatorname{Image}[\operatorname{Hom}_A(L_0, E^{i-1}) \to \operatorname{Hom}_A(L_0, E^i)]$.

3° Fixons les bases des L_i et les matrices h_i. Pour tout entier n, on peut définir un complexe $(L^{(n)}_{.}, h^{(n)}_{.})$, tel que $L^{(n)}_i = L_i$, et que $h^{(n)}_i$ est la matrice obtenue en élevant les coefficients de h_i à la puissance p^n. Ce complexe a une homologie de longueur finie. Posons $M_n = \operatorname{Coker}(h^{(n)}_0)$. On voit comme précédemment que si

$$Z^n_i = \operatorname{Ker}[\operatorname{Hom}_A(M_n, E^i) \to \operatorname{Hom}_A(M_n, E^{i+1})],$$

on a $Z_i^n \subset C_i$. si $i > s$. On remarque alors que si

$$K_i = \operatorname{Ker}[\operatorname{Hom}_A(L_0, E^i) \to \operatorname{Hom}_A(L_0, E^{i+1})],$$

on a $K_i = \bigcup_{n \geqq 0} Z_i^n$. On en déduit $C_i = K_i$ pour $i > s$, c'est-à-dire $H^i(E^{\cdot}) = 0$ pour $i > s$, ce qui implique $d \leqq s$, d'après le théorème de dualité locale.

Remarques. — Le nouveau théorème d'intersection pour un anneau local équicaractéristique peut se déduire de l'existence d'un « grand module de Cohen-Macaulay » sur un tel anneau, démontrée par M. Hochster ([1]).

Il semble que le théorème 1 est annoncé, sous la même forme que celle donnée ici par P. C. Roberts (Mc Gill University. Montréal, Québec, Canada).

2. Le cas gradué. — Soit $A = \sum_{n \geqq 0} A_n$ un anneau gradué en degrés positifs, tel que A_0 soit un anneau local artinien et que A soit une A_0-algèbre de type fini. Considérons (L.) un complexe parfait de A-modules libres gradués de type fini, à homomorphismes gradués de degré zéro. Si r_i est le rang de L_i, alors $L_i = \bigoplus_{j=1}^{r_i} A[-n_{ij}]$, avec $n_{ij} \in \mathbf{Z}$, où $A[-d]$ est le A-module gradué tel que $(A[-d])_n = A_{n-d}$. Pour tout A-module gradué de type fini M, notons P_M le polynome de Samuel de M, défini par $P_M(n) = \sum_{i<n} \operatorname{Long}(M_i)$ pour $n \gg 0$.

Lemme. — *On a la relation suivante :*

$$\sum_{i \geqq 0} (-1)^i P_{H_i(L.)} = \sum_{k \geqq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \rho_k P_A^{(k)},$$

où $\rho_k = \sum_{i \geqq 0} (-1)^i \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij}^k$, *et où* $P_A^{(k)}$ *désigne le polynome dérivée k-ième de* P_A.

Démonstration. — Le complexe (L.) s'écrit :

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{r_s} A[-n_{sj}] \to \ldots \to \bigoplus_{j=1}^{r_1} A[-n_{1j}] \to \bigoplus_{j=1}^{r_0} A[-n_{0j}] \to 0.$$

On a alors la relation suivante :

$$\sum_{\lambda < n} \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \operatorname{long}((H_i(L.))_\lambda) = \sum_{\lambda < n} \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \sum_{j=1}^{r_i} \operatorname{long}(A_{\lambda - n_{ij}}).$$

Le lemme s'en déduit directement au moyen de la formule de Taylor.

Le corollaire qui suit est un cas particulier du théorème 1.

La nouvelle démonstration fournie fait intervenir une hypothèse numérique déjà rencontrée dans l'étude des courbes de l'espace [([3]), 6.2].

Corollaire. — *Supposons de plus* $n_{ij} \geqq n_{i-1,j'}$ *pour tous i, j, j'. Alors si* (L.) *n'est pas homotope à zéro, on a*

$$\dim A \leqq \operatorname{long}(L.) + \sup_i \dim H_i(L.).$$

Soit $g = \inf \{ i, \rho_i \neq 0 \}$. Il suffit de démontrer $g \leqq s$, où s est la longueur du complexe (L.).

Supposons que $\rho_i = 0$ pour $0 \leqq i \leqq s$. On en déduit que le déterminant suivant est nul

$$\begin{vmatrix} r_0 & \dots & r_s \\ \sum_j n_{0,j} & \dots & \sum_j n_{s,j} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_j n_{0,j}^s & \dots & \sum_j n_{s,j}^s \end{vmatrix}.$$

Donc que la somme suivante de déterminants est nulle :

$$\sum_{j_0, \dots, j_s} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n_{0,j_0'} & & n_{s,j_s} \\ n_{0,j_0}^s & & n_{s,j_s}^s \end{vmatrix}.$$

On reconnaît là des déterminants de Vandermonde qui sont tous positifs ou nuls, et on sait que l'un au moins est non nul car le complexe (L.) n'est pas homotopiquement trivial.

THÉORÈME 2. — *Soit* $A = \sum_{n \geqq 0} A_n$ *un anneau gradué en degrés positifs tel que* A_0 *soit un anneau local artinien et que* A *soit une* A_0*-algèbre de type fini. Soit* M *un* A*-module gradué non nul de type fini de dimension projective finie admettant la résolution projective graduée, à homomorphismes de degrés zéro, suivante* :

$$\text{(C.)} \qquad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{r_s} A[-n_{s,j}] \to \dots \to \bigoplus_{j=1}^{r_0} A[-n_{0,j}] \to M \to 0.$$

Soit $g = \inf \left\{ k, \rho_k = \left[\sum_{i=0}^{s} (-1)^i \sum_{j=0}^{r_i} n_{i,j}^k \right] \neq 0 \right\}$. Alors :

(i) $e_{d-g}(M) = [(-1)^g/g!]\, \rho_g\, e_d(A)$, où $d = \dim A$, *et où pour un* A*-module gradué* N *de dimension* n, *on note* $e_n(N)$ *la multiplicité de* N.

(ii) $g = \text{grade } M = \dim A - \dim M$.

De plus, si N *est un* A*-module gradué de type fini, on a :*

(iii) $\dim N \otimes M \geqq \dim N + \dim M - \dim A$.

(iv) Si $M \otimes N$ est de longueur finie, alors

$$\chi(M, N) = \sum_i (-1)^i \operatorname{long}(\operatorname{Tor}_i^A(M, N)) \geqq 0,$$

et l'inégalité est stricte si et seulement si $\dim M + \dim N = \dim A$.

Dans ce cas, on a $\chi(M, N) = e_{d-g}(M) . e_g(N)/e_d(A)$.

Démonstration. — La relation (i) se déduit immédiatement du lemme. Les propriétés (iii) et (iv) aussi, en prenant $N = A/P$, où P est un idéal gradué de A, et en considérant le complexe parfait.

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{r_s} A/P[-n_{s,j}] \to \dots \to \bigoplus_{j=1}^{r_0} A/P[-n_{0,j}] \to 0.$$

Pour (ii), il suffit de montrer que $q \in \operatorname{Supp}(M)$ implique $\dim(A_q) \geqq g$.

Soient q_i, $i = 1, \ldots, t$ les idéaux premiers minimaux de Supp (M) tels que dim. $(A_{q_i}) < g$. Soit $c = \text{Sup}(\dim(A_{q_i}))$, et soit $n = \sup(\dim(A/q_i))$. Si $S = \bigcap_1^t (A - q_i)$, soit $\mathfrak{a}$ l'idéal noyau de $A \to S^{-1} A$. On a alors $\dim A/\mathfrak{a} \leqq c+n$. Considérons m un idéal premier minimal de Supp $(M \otimes A/\mathfrak{a})$ tel que $\dim(A/m) \geqq n$. D'après le théorème d'intersection, on sait que $\dim(A/\mathfrak{a})_m \leqq$ d. p. M_m. Comme $\text{prof}(A_m) \leqq \dim(A/\mathfrak{a})_m$. on en déduit dim. $(A/\mathfrak{a})_m =$ prof. A_m. Si $m \not\supset q_i$ pour $i = 1, \ldots, t$. alors prof. $(A_m) \geqq g$, et ceci implique

$$\dim(A/\mathfrak{a}) \geqq \dim(A/m) + \dim(A/\mathfrak{a})_m \geqq n+g > n+c,$$

ce qui est une construction. Donc un tel idéal m est nécessairement l'un des q_i. Comme

$$\text{Tor}_s^A(A/\mathfrak{a}, M)_{q_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad s \geqq 1 \quad \text{et} \quad i = 1, \ldots, t,$$

on en déduit que $\sum (-1)^i P_{H_i(C. \otimes A/\mathfrak{a})}$ est un polynome de degré n. Le lemme implique alors que $P_{A/\mathfrak{a}}$ est de degré $n+g$, donc que $\dim A/\mathfrak{a} = n+g > n+c$, ce qui est une contradiction.

(*) Séance du 17 avril 1974.

(1) M. Hochster, *Deep local rings*, Aarhus Universitet, Preprint Series 73/74, n° 8.
(2) C. Peskine et L. Szpiro, *Pub. Math. I. H. E. S.*, n° 42, 1973, p. 47-119.
(3) C. Peskine et L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques* (à paraître dans *Invent. Math.*).
(4) J.-P. Serre, *Algèbre locale. Multiplicités* (*Lectures notes* n° 11, 1965, Springer).

C. P. :
Université de Strasbourg,
Département de mathématiques
15, *rue René-Descartes,*
67000 *Strasbourg;*
L. S. :
3, *rue de la Butte-aux-Cailles,*
75013 *Paris.*