SUR LA THÉORIE DES COMPLEXES PARFAITS

L.SZPIRO

Soit A un anneau local noethérien; pour notre propos, un *complexe parfait* sur A est un complexe fini

$$0 \to L_s \to L_{s-1} \to \ldots \to L_t \to 0$$

de A-modules libres de rang fini. On s'intéresse principalement aux propriétés "d'intersection" d'un complexe parfait L. avec un A-module de type fini N. A savoir, si X = Spec A et Y = Support(H(L.)), on veut des renseignements sur l'application

$$\chi : K.(X) \to K.(Y)$$

où K. est le foncteur "Groupe de Grothendieck" des faisceaux cohérents et

$$\chi(N) = \Sigma(-1)^i [H_i(L. \otimes N)].$$

Si A est un anneau local régulier non ramifié, la situation est controlée et décrite dans le cours de Serre [10]. Dans un cas plus général le seul résultat patent est le Théoreme d'Intersection dont nous parlons plus bas. Partant de ce théoreme et des conjectures qu'on aimerait démontrer, l'examen du cas gradué nous conduit à introduire une conjecture du type 'Riemann-Roch". Cette conjecture a été montrée par W.Fulton dans le cas des anneaux locaux géométriques.

1. *Le Théoreme d'Intersection comme théoreme d'annulation*

Définition. Soit L. un complexe parfait sur un anneau local noethérien A; on appelle *longueur* de L., et on note long(L.), l'entier définit par long(L.) ≤ s si L. est homotope à un complexe parfait F. de la forme

$$\ldots \to 0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to F_{s+t} \to \ldots \to F_t \to 0 \to 0 \to \ldots \,.$$

Par exemple, un complexe parfait homotope a zéro est dit de longueur -1!

THÉOREME D'INTERSECTION. *Soit* A *un anneau local noethérien contenant un corps et* L. *un complexe parfait sur* A *tel que* $\operatorname{long}(H.(L.)) < \infty$. *Alors si* $\operatorname{long}(L.) > -1$ *on a*

$\operatorname{long}(L.) \geq \dim A.$

On connait trois démonstrations de ce théoreme.

(a) La démonstration qu'on trouve dans [6] et [7] consiste à montrer *l'annulation de certains groupes de cohomologie locale* $H^i_{\underline{m}}(A)$. Remarquons que le lecteur surpris que cette démonstration donne le cas equicaractéristique zéro et non seulement le cas formellement géométrique peurra faire l'exercice simple suivant: si k est un corps et $B = k[X^{\ell}_{ij}]/X^{\ell} \circ X^{\ell+1} = 0$, l'anneau universel pour les complexes parfaits L. dont on a fixé les rangs des L_i (cf. §3), l'hypothèse du Théoreme d'Intersection donne un homomorphisme fini $\hat{B} \to \hat{A}$; en approximant $\hat{A}$ sur $\hat{B}$ on se ramène au cas formellement géométrique.

(b) La démonstration de Hochster [4], en utilisant le *Lemme d'Acyclicité* [6], conclue à l'annulation de la cohomologie de L. après tensorisation par un gros module de Cohen-Macaulay [4].

(c) La démonstration de P.Roberts [8,9] montre *l'annulation de certains groupes de cohomologie du complexe dualisant.*

On voit que ce théoreme donne des renseignements de dimension par des "vanishing theorems" mais par contre aucun renseignement sur la caractéristique d'Euler-Poincaré

$\Sigma(-1)^i \operatorname{long}(H_i(L.)).$

Une situation analogue s'est développée au 19^e^ siècle dans l'étude des zéros et des poles des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann. On pense donc tout naturellement qu'un résultat de nature "Riemann-Roch" devrait clarifier la situation. Pour illustrer ce propos nous allons regarder le cas gradué à la place du cas local. Nous précisons d'abord les conjectures qu'on aimerait démontrer.

2. *Les conjectures*

A est un anneau local noethérien, et L. est un complexe parfait sur A.

Conjecture C1. Si L. est la résolution projective d'un A-module M et si N est un A-module de type fini tel que $\dim M \otimes N = 0$, alors $\dim N \leq \operatorname{grade} M$; de plus $\operatorname{grade} M + \dim M = \dim A$.

(Ici $\operatorname{grade} M = \inf\{i : \operatorname{Ext}^i_A(M,A) \neq 0\}$.)

Conjecture C2. Si L. a tous ses groupes de cohomologie de longueur finie et si $L.^{\vee} = \operatorname{Hom}(L.,A)$, on a

$$\chi(L.^{\vee}) = (-1)^d \chi(L.),$$

où $d = \dim A$. De plus, si caractéristique(A) = $p > 0$, si F est l'homomorphisme de Frobenius de A et si $L.^{(p)} = F^*L.$, alors on a

$$\chi(L.^{(p)}) = p^d \chi(L.).$$

Conjecture C3. Si L. a tous ses groupes de cohomologie de longueur finie et si N est un A-module de type fini tel que $\dim N < \dim A$, alors

$$\chi(L. \otimes N) = 0.$$

Conjecture C4. Le Théoreme de Riemann-Roch local (voir §4) est vrai.

3. *Le cas gradué*

Dans notre note [7] avec C.Peskine nous montrons les Conjectures C1 à C4 pour les complexes parfaits homogènes sur un anneau gradué. Nous rappelons d'abord le lemme qui joue le role de Théoreme de Riemann-Roch gradué et donnons les détails de la démonstration de la deuxième partie de C1, le reste coulant de source.

Soit A un anneau gradué, $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, tel que A_0 *soit artinien* et A de type fini sur A_0. Nous notons $A(n)$ le A-module gradué tel que $A(n)_k = A_{n+k}$. Un *complexe parfait homogène* sur A est un complexe parfait de la forme

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_i} A(-n_{i\,j}) \xrightarrow{\phi_i} \bigoplus_{j=1}^{r_{i-1}} A(-n_{i-1\,j}) \longrightarrow \cdots$$

où ϕ_i est un homomorphisme homogène de degré zéro.

Par exemple, si k est un corps, $\underline{r} = (r_0,\ldots,r_s)$ une suite d'entiers, $X^i_{\ell,m}$ ($i = 0,\ldots,s-1$, $\ell = 1,\ldots,r_i$, $m = 1,\ldots,r_{i+1}$) des variables (coefficients des matrices $\phi_i = (X^i_{\ell,m})_{\ell,m}$) et

$$A_{\underline{r}} = k[X^i_{\ell,m}]/(\phi_{i+1} \circ \phi_i)_{i=0,\ldots,s-1},$$